NO DATE 11/05/17.

Ex: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \lim_{y\to+\infty} \left[\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=y}$

$= \lim_{y\to+\infty} \left(\arctan(y) - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{y\to-\infty} \int_y^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \lim_{y\to-\infty} (0 - \arctan y)$

$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Apo, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

NO DATE

π.χ.

$$I = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}\,dx.$$

$$\int x \cdot e^{-x}\,dx = \int x\,(-e^{-x})'\,dx = (-x \cdot e^{-x}) - \int 1\,(-e^{-x})\,dx$$

$$= (-x \cdot e^{-x}) + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-x} - e^{-x}\ (+c)$$

$$I = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{y \to +\infty} \int_0^{y} x \cdot e^{-x}\,dx.$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left[-x \cdot e^{-x} - e^{-x}\right]_{x=0}^{x=y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left((-y \cdot e^{-y} - e^{-y}) - (0 - e^{0})\right)$$

$$= (0-0) - (0-1) = 1.$$

Για το σπίτι: Ομοίως με παραπάνω να λυθεί το $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx$.

NO DATE

* Ο ορισμός του ολοκληρώματος για $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με χρήση άνω και κάτω αθροισμάτων οφείλεται στον Darboux.

Ορισμός: (κατά Riemann)

⇝ Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν $\exists$ ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ ώστε να ισχύει το εξής: Για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ ώστε για κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$ με $\|P\|<\delta$ και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,n$ να ισχύει:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-I(f)\right|<\varepsilon.$$

Αν συμβολίσουμε με Ξ την επιλογή σημείων $\{\xi_k,\dots,\xi_n\}$: τότε

$$\Sigma(f,P,\Xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

Αποδεικνύεται ότι:

Η f είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον ορισμό του Darboux αν-ν είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον ορισμό του Riemann και σε αυτή την περίπτωση $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$.

NO DATE

⇝ Συνέπεια : Αν επιλέξω ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $[a,b]$ με $\|P_n\| \to 0$ και την μία τυχαία επιλογή σημείων $\Xi_n = (\xi_k)$ της P_n, τότε προκύπτει ένα όριο : $\lim \Sigma(f, P_n, \Xi_n) = \int_a^b f(x)dx$

Συνήθως επιλέγουμε ως σημεία της Ξ_n τα αριστερά ή δεξιά άκρα των διαμερίσεων.

__Εφαρμογές__

1) Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Με τι ισούται το $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$;

__Λύση__

Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση:

$$P_n = \{ \underset{x_0^n}{0} < \underset{x_1^n}{\tfrac{1}{n}} < \tfrac{2}{n} < \dots < \underset{x_n^n}{\tfrac{n}{n} = 1} \}$$

Επιλέγουμε ως ενδιάμεσα σημεία τα $\xi^n = x_k^n$ (τα δεξιά άκρα των διαστημάτων). Σύμφωνα με το παραπάνω:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_k \Sigma(f, P_n, \Xi_n)$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n)$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

NO DATE

Π.χ.

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}.$$

Λύση

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(\tfrac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right) \xrightarrow{n\to+\infty}$$

$$\longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Θέτουμε $f(x) = \frac{1}{1+x}$, f συνεχής στο $[0,1]$ άρα ολοκληρώσιμη

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \log 2 - \log 1$$

$$= \log 2$$

Π.χ. $\lim_n \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} =$

$$= \lim_n \frac{1}{n}\left(\sqrt{\tfrac{1}{n}} + \sqrt{\tfrac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\tfrac{n}{n}}\right)$$

$= \lim_n \Sigma(f, P_n, \Xi_n)$, όπου $f(x) = \sqrt{x}$, (συνεχής και άρα ολοκλ. στο $[0,1]$).

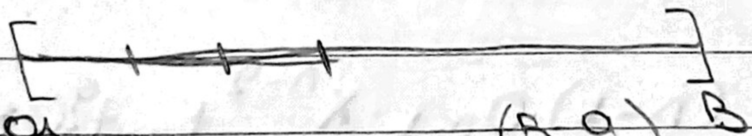
$P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\}$

$\|P_n\| \to 0$, $\Xi_n = \{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$

Παρατήρηση: Το παραπάνω όριο (όπως και η πλειοψηφία ορίων που υπολογίζεται με χρήση ακολουθιών) δεν μπορεί να υπολογιστεί με χρήση θεωρήματος ισοδυναμίας ακολουθιών.

Γενικότερα: αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

$$\lim_n \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$



$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$

*Ο. Τόλιας προτείνει να κάνουμε ασκήσεις στο Internet με ολοκληρώσιμα από τις σημειώσεις-Βιβλία του Γιαννόπουλου

Για εξάσκηση

NO DATE

Πολυώνυμα Taylor - Σειρές Taylor.

Στόχος: α) Να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ από κάποιο πολυώνυμο.

β) Να αναπτύξουμε μια συνάρτηση (με κατάλληλες προϋποθέσεις) σε δυναμοσειρά.

Παρατήρηση: Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ένα πολυώνυμο βαθμού $\le n$.

Παρατηρούμε ότι $\boxed{a_0 = P(0)}$

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)\cdot a_{n-1}\cdot x^{n-2} + \dots + 2a_2\cdot x + a_1$$

άρα $\boxed{a_1 = P'(0)}$

$$P''(x) = n(n-1)\cdot a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)\cdot a_{n-1}\cdot x^{n-3} + \dots + 2a_2.$$

$P''(0) = 2a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{P''(0)}{2}}$

ομοίως $\boxed{a_3 = \frac{P'''(0)}{3!}}$, $\boxed{a_4 = \frac{P^{(4)}(0)}{4!}}$

$$\boxed{a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n}$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$

Το πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $\leq n$ γράφεται στην μορφή $P(x) = B_n(x-x_0)^n + B_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + B_2(x-x_0)^2 + B_1(x-x_0) + B_0$

Τότε όπως προηγουμένως:

$$B_0 = P(x_0)$$

$$B_1 = P'(x_0)$$

$$B_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}$$

$$B_3 = \frac{P'''(x_0)}{3!}$$

$$\vdots$$

$$B_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Έτσι $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

[για $x_0 = 0$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$]

Έτσι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ προσδιορίζεται πλήρως από τους αριθμούς $P(x_0), P'(x_0), \dots, P''(x_0)$ (για κάποιο x_0)

NO DATE

Ερώτηση:

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0\in[\alpha,\beta]$. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ ώστε $P(x_0)=f(x_0)$, $P'(x_0)=f'(x_0)$,
$P''(x_0)=f''(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το πολ/μο

$$P(x)=B_n(x-x_0)^n+B_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\dots+B_1(x-x_0)+B_0$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

, όπου $B_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ για $k=0,1,\dots,n$

$$T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

εξαρτάται από το n, την συνάρτηση f και το σημείο x_0

Καλείται πολυώνυμο Taylor τάξης n της συνάρτησης f στο σημείο x_0.
Θέτουμε επίσης $R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}(x)$ καλείται υπόλοιπο Taylor τάξης n της f στο x_0

Το πόσο καλά προσεγγίζεται η f από το $T_{n,f,x_0}(x)$ εξαρτάται το πόσο μικρό είναι το $R_{n,f,x_0}(x)$.